УДК 004.942 + 623.454.862

Е.Г. РЕВУНОВА, Ю.Л. ЗАБУЛОНОВ, Л.А. ОДУКАЛЕЦ

Державна установа "Інститут геохімії навколишнього середовища НАН України", м. Київ

ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТАВЛЯЮЩИХ ОШИБКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РЕДУКЦИИ ИЗМЕРЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Проведен экспериментальный анализ точности решения задачи редукции методом сингулярного разложения. Исследована зависимость нормы составляющих ошибки решения (смещение и дисперсия) от числа компонент сингулярного разложения. Определение минимума ошибки осуществлялось с использованием критерия Маллоуза. Метод редукции с использованием критерия Маллоуза обеспечивает достаточно высокую точность редукции.

Введение

Эффективность информационных технологий, связанных с дистанционным мониторингом, в значительной мере зависит от метода и реализации решения задачи восстановления сигнала объекта по результатам дистанционных измерений. Сигнал объекта искажается при взаимодействии со средой распространения и детектирующей системой. Для эффективного мониторинга состояния объекта наблюдения сигнал объекта необходимо восстановить по информации, принятой с датчиков.

Современный уровень развития вычислительных средств позволяет существенно расширить возможности информационно-измерительных технологий дистанционного мониторинга. Предельные возможности измерительных приборов обусловлены физическими явлениями, формирующими процесс измерения. В случае, когда известно математическое описание физических явлений, определяющих процесс измерения, может быть поставлена задача компенсации их искажающего влияния путем построения соответствующего вычислительного метода.

Основополагающими работами в этом направлении являются работы по редукции измерений в конечномерных гильбертовых пространствах [1, 2]. Одним из видов редукции измерений является редукция измерений к идеальному прибору, то есть, к прибору, обладающему некоторыми требуемыми характеристиками (например, повышенной разрешающей способностью). Однако редукция к идеальному прибору требует, чтобы для оператора **A,** характеризующего исходный прибор, существовал обратный оператор вида: $\mathbf{A}^{-} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

На практике такая ситуация обеспечивается далеко не всегда. Оператор, характеризующий исходный прибор, зачастую имеет высокое число обусловленности и ряд сингулярных чисел, плавно спадающий к нулю. Вычисление обратного оператора как $\mathbf{A}^{-}$ в этом случае ведет к неустойчивому решению задачи редукции измерений. В этом случае применяют т.н. смещенную редукцию измерений.

В данной работе предложен метод смещенной редукции измерений на основе усеченного сингулярного разложения, позволяющий производить редукцию в случае, когда матрица исходного прибора имеет высокое число обусловленности, и ряд сингулярных чисел, плавно спадающий к нулю. Проведено разложение выражения для ошибки на составляющие, позволяющие в дальнейшем строить методы оценки оптимального числа компонент сингулярного разложения. Под оптимальным числом компонент сингулярного разложения мы понимаем их число, обеспечивающее минимальное значение ошибки. Понятно, что наилучшим редуцирующим преобразованием, например, с точки зрения повышения разрешающей способности, было

бы преобразование к прибору с базисом, сформированным дельта функциями. К сожалению, на практике это является затруднительным как для существующих методов редукции, так и для метода, предложенного в данной статье. С целью очертить границы применимости предлагаемого метода в данной работе экспериментально показано, как члены полученного разложения ошибки определяют предельные возможности редукции.

Классические методы редукции измерений

Для широкого класса экспериментов характерна следующая линейная схема измерения непосредственно ненаблюдаемого объекта $\boldsymbol{\theta}$: $\mathbf{y}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\varepsilon}$, где $\mathbf{y}$ – результат измерения искаженного шумом $\boldsymbol{\varepsilon}$. Простейшая математическая модель схемы измерения задается парой линейных операторов $\{\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Omega}\}$, причем $\boldsymbol{\Phi}$ задает математическую модель измерительного прибора, $\boldsymbol{\Omega}$ – погрешности измерения, а пара $\{\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Omega}\}$ описывает процесс измерения. Если $\boldsymbol{\Phi}\neq\mathbf{I}$, имеет место случай косвенных измерений сигнала $\boldsymbol{\theta}$, а при $\boldsymbol{\Phi}=\mathbf{I}$ – случай прямого измерения.

В рассматриваемой постановке задача обработки результатов измерения $\mathbf{y}$ состоит в том, чтобы с помощью математических преобразований привести вектор $\mathbf{y}$ к такому виду, какой он имел бы на выходе заранее заданного прибора высокого качества, мало искажающего сигнал $\boldsymbol{\theta}$. Задачу преобразования вектора выхода $\mathbf{y}$ к выходу линейной системы с заданными свойствами называют задачей математической редукции результатов измерений [1]. Рассмотрим пример редукции результатов измерений.

Зададим математическую модель исходного измерительного прибора, сформировав оператор $\boldsymbol{\Phi}$ базисными функциями: $f_n(z)=\exp(-k_1(z-c)^2)$, $c=dn+b$, (d=5, b=20), z={1,5,10,…,100}, n – номер базисной функции, k=0,05. Вектор $\boldsymbol{\theta}$ сформируем следующим образом: θ_5 =1, θ_6 =0,5, θ_{10} =1, θ_{11} =0,26, θ_{12} =0,25, другие компоненты вектора $\boldsymbol{\theta}$ нулевые. Сигнал $\mathbf{y}_0$ получим как $\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}$. Гауссообразные базисные функции, сформировавшие столбцы матрицы $\boldsymbol{\Phi}$, взвешиваются компонентами вектора $\boldsymbol{\theta}$ и суммируются, образуя вектор измерений $\mathbf{y}_0$ (рис. 1-а). Хотя в векторе $\boldsymbol{\theta}$ пять ненулевых компонент, в векторе измерений $\mathbf{y}$ имеется только два выраженных максимума. Такая ситуация наблюдается из-за того, что гауссообразные базисные функции достаточно широки и, соответственно, разрешение «прибора» невелико.

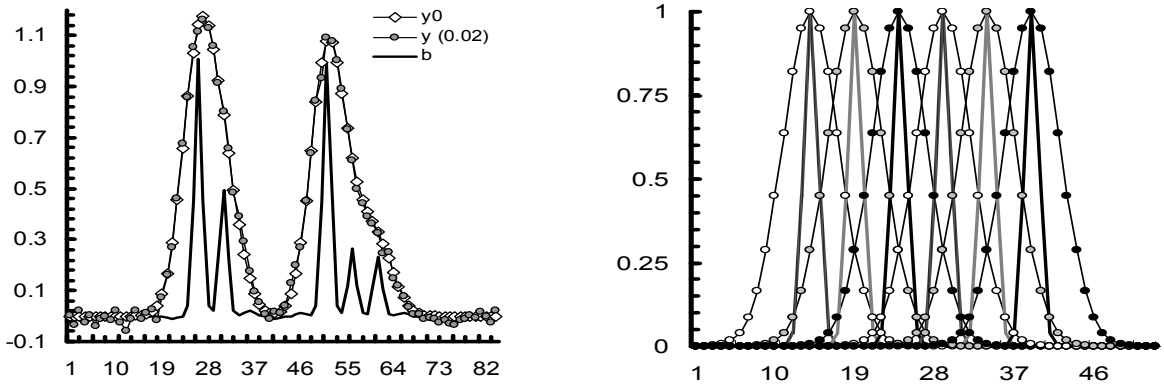


Рис. 1.

а – пример редукции

б - базисные функции $\boldsymbol{\Phi}$ и $\boldsymbol{\Psi}$

Улучшим разрешение заданного прибора путем редукции измерений. Зададим математическую модель измерительного прибора с более высоким разрешением, сформировав оператор $\boldsymbol{\Psi}$ базисными функциями $f_n(z)$, k=0,1 (рис. 1-б). Воспользовавшись методом редукции измерений, который будет описан ниже, преобразуем вектор измерений $\mathbf{y}$ к вектору $\mathbf{b}$, измеренному прибором $\boldsymbol{\Psi}$. Результат преобразования представлен на рис. 1-б. Преобразованный сигнал $\mathbf{b}$ имеет пять максимумов (по числу ненулевых компонент вектора $\boldsymbol{\theta}$). Улучшение разрешающей способности – очевидно.

Рассмотрим формальную постановку задачи редукции измерений. Пусть сигнал **y** получен с выхода линейной системы A {**Φ**, **Ω**}. На вход линейной системы подан сигнал **θ**. Линейная система A выполняет преобразование **Φθ=y**$_0$. С учетом шума **y=y**$_0$**+ε**. В работе [1] предложен метод, позволяющий преобразовать **y** к выходу линейной системы B {**Ψ**, **Ω**}, выполняющей преобразование:

$$\mathbf{\Psi}\,\theta = \mathbf{y}_{01}. \tag{1}$$

Преобразование вектора выхода к выходу линейной системы с заданными свойствами производится путем умножения на матрицу редукции **R:**

$$\mathbf{Ry} = \mathbf{R}\,\mathbf{\Phi}\theta + \mathbf{R}\varepsilon. \tag{2}$$

Из сопоставления (1) и (2) видно, что **Ψ = R Φ**.

В связи с разложением:

$$\mathbf{Ry} = \mathbf{R}\,\mathbf{\Phi}\theta + \mathbf{R}\varepsilon = \mathbf{\Psi}\,\theta + (\mathbf{R\Phi} - \mathbf{\Psi})\,\theta + \mathbf{R}\varepsilon \tag{3}$$

вектор **Ry** можно рассматривать как сигнал на выходе прибора **Ψ**, искаженного шумом **Rε** и ложным сигналом (**RΦ–Ψ**) **θ**.

Если ставится задача отыскания матрицы редукции **R,** обеспечивающей ||**Ψ**–**RΦ**||=0, то мы имеем дело с *несмещенной редукцией измерений*. В случае несмещенной редукции ложный сигнал (**RΦ–Ψ**) **θ** отсутствует. В случае, когда аддитивный шум в векторе **y** достаточно высок и (или) оператор **Φ** задан неточно, постановка задачи редукции измерений как несмещенной редукции и ее решение на основе псевдообращения является неустойчивым.

Для преодоления этого недостатка ставят задачу *смещенной редукции измерений*, где вместо точного равенства требуется максимальная близость **Ψ** к **RΦ** при заданных ограничениях. При заданном уровне шумов ставится задача отыскания **R**, обеспечивающего минимальный ложный сигнал для любого входного сигнала **θ**.

Несмещенная редукция. В [1] утверждается, что если

- матрица $\mathbf{\Phi\Phi}^{\mathrm{T}} + \mathbf{\Omega}$ – не вырождена,
- известна корреляционная матрица шума $\sum = E\,(\varepsilon\varepsilon^{\mathrm{T}})$,

матрицу редукции можно найти следующим образом:

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Psi}\,(\sum{}^{-1/2}\mathbf{\Phi})^{-}\,\mathbf{\Omega}^{-1/2},\ \mathbf{A} = \sum{}^{-1/2}\mathbf{\Phi}, \tag{4}$$

где, $\mathbf{A}^{-} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$ псевдообращение.

Смещенная редукция. В работе [1, 3] предлагается вариационная постановка задачи по отысканию преобразования **R**, обеспечивающего минимальный ложный сигнал для любого входного сигнала **θ** при заданном уровне шума:

$$\min_{\mathrm{R}}\ \{\ ||\mathbf{R}_{\varepsilon}\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Psi}||\ /\ E(||\mathbf{R}_{\varepsilon}||) \le \varepsilon\} = \rho_{\varepsilon} \tag{5}$$

где, ρ_{ε} – величина, на которую прибор $\mathbf{R}_{\varepsilon}\mathbf{\Phi}$ отличается от прибора **Ψ**.

Решением вариационной задачи является:

$$\mathbf{R}(\alpha) = \mathbf{\Psi}\,\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{\Phi}\,\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} + \alpha\sum)^{-1} \tag{6}$$

Соответственно, оптимальное решение задачи редукции имеет вид:

$$\mathbf{\Psi}\theta = \mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{\Phi}\,\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} + \alpha\sum)^{-1}\mathbf{y}. \tag{7}$$

Для выбора параметра α в работе [1] предлагается использовать приемы, традиционно применяющиеся для отыскания параметра регуляризации [4]: обобщенной невязки, перекрестной проверки. В работе [3] для выбора α, называемого в данном случае параметром Парето, предлагается использовать один из следующих принципов: равномерной оптимальности, справедливого компромисса, гарантированного результата.

Рассмотрим метод решения задачи редукции измерений с использованием сингулярного разложения.

Преобразование вектора выхода на основе сингулярного разложения

Рассмотрим решение задачи редукции измерений и его точность в случае, когда матрица $\mathbf{\Phi}$ имеет высокое число обусловленности $\sigma_{max}/\sigma_{min}$ и ее ряд сингулярных чисел σ_i плавно спадает к нулю.

Точность решения задачи редукции измерений будем оценивать с помощью ошибки d_y восстановления сигнала $\mathbf{y}_{01}$, вычисляемой как

$$d_y = ||\mathbf{e}_y|| = ||\mathbf{R}\mathbf{y} - \mathbf{y}_{01}||. \quad (8)$$

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{R}\,\mathbf{y}_0 + \mathbf{R}\,\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{y}_{01} = \mathbf{R}\,\mathbf{y}_0 + \mathbf{R}\,\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{\Psi}\,\boldsymbol{\theta}. \quad (9)$$

Введем матрицу $\mathbf{D}$, отражающую различие между базисными функциями $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$: $\mathbf{D}=\mathbf{\Phi}-\mathbf{\Psi}$.

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{R}\,\mathbf{y}_0 + \mathbf{R}\,\boldsymbol{\varepsilon} - (\mathbf{\Phi} - \mathbf{D})\,\boldsymbol{\theta} = \mathbf{R}\,\mathbf{y}_0 + \mathbf{R}\,\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{\Phi}\,\boldsymbol{\theta} + \mathbf{D}\,\boldsymbol{\theta} = \mathbf{R}\,\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0 + \mathbf{R}\,\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}\,\boldsymbol{\theta}; \quad (10)$$

Матрицу редукции получим следующим образом:

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^{+}, \quad (11)$$

$$\mathbf{\Phi}_k^{+} = \mathbf{V}\ \mathrm{diag}\ (\varphi_i / \sigma_i)\ \mathbf{U}^{T},\ \text{iff}\ \sigma_i > tresh\ \varphi_i = 1,\ \text{otherwise}\ \varphi_i = 0. \quad (12)$$

Здесь $\mathbf{\Phi}_k = \mathbf{U}\ \mathbf{S}\ \mathbf{V}^{T}$, – приближение матрицы $\mathbf{\Phi}$ ($m \times n$), полученное по k ($k<n$) компонентам сингулярного разложения. $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k)$ – матрица левых сингулярных векторов, $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k)$ – матрица правых сингулярных векторов, $\mathbf{S} = \mathrm{diag}(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)$ – матрица сингулярных чисел.

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{\Psi}\ \mathbf{V}\ \mathrm{diag}\ (\varphi_i / \sigma_i)\ \mathbf{U}^{T} \quad (13)$$

Распишем выражение для матрицы редукции (11) в зависимости от матрицы различий $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{\Psi} = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{D});\ \mathbf{R} = \mathbf{\Phi}\,\mathbf{\Phi}^{+} - \mathbf{D}\,\mathbf{\Phi}^{+}; \quad (14)$$

Подставим его в (10) и получим выражение для вектора ошибки редукции $\mathbf{e}_y$:

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{\Phi}\,\mathbf{\Phi}_k^{+}\,\mathbf{y}_0 - \mathbf{D}\,\mathbf{\Phi}_k^{+}\,\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0 + \mathbf{\Phi}\,\mathbf{\Phi}_k^{+}\,\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\,\mathbf{\Phi}_k^{+}\,\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}\,\boldsymbol{\theta}; \quad (15)$$

Сгруппировав составляющие ошибки, включающие $\mathbf{y}_0$

$$\mathbf{e}_y = (\mathbf{\Phi}\,\mathbf{\Phi}^{+} - \mathbf{I})\,\mathbf{y}_0 + \mathbf{\Phi}\,\mathbf{\Phi}^{+}\,\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\,\mathbf{\Phi}^{+}\,\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\,\mathbf{\Phi}^{+}\,\mathbf{y}_0 + \mathbf{D}\,\boldsymbol{\theta}; \quad (16)$$

$$\mathbf{e}_y = (\mathbf{\Phi}_k\,\mathbf{\Phi}_k^{+} - \mathbf{I})\,\mathbf{y}_0 + \mathbf{\Phi}_k\,\mathbf{\Phi}_k^{+}\,\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\,\mathbf{\Phi}_k^{+}\,\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\,\mathbf{\Phi}_k^{+}\,\mathbf{y}_0 + \mathbf{D}\,\mathbf{\Phi}^{+}\,\mathbf{y}_0; \quad (17)$$

получим выражение для вектора ошибки редукции $\mathbf{e}_y$, представленное суммой ошибки оценивания вектора $\mathbf{y}$ ($\mathbf{e}_{y1} + \mathbf{e}_{y2}$) без редуцирующего преобразования и $\mathbf{e}_{y3}$ – составляющей ошибки редукции, определяемой матрицей различий $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_{y1} + \mathbf{e}_{y2} + \mathbf{e}_{y3}; \quad (18)$$

Составляющие $\mathbf{e}_{y1}$ и $\mathbf{e}_{y2}$ – это смещения и дисперсия оценки выхода $\mathbf{y}$ без редуцирующего преобразования:

$$\mathbf{e}_{y1} = (\mathbf{\Phi}_k\,\mathbf{\Phi}_k^{+} - \mathbf{I})\,\mathbf{y}_0;\ \mathbf{e}_{y2} = \mathbf{\Phi}_k\,\mathbf{\Phi}_k^{+}\,\boldsymbol{\varepsilon}; \quad (19)$$

Норма смещения нередуцированной (исходной) оценки $\mathbf{y}$ убывает с ростом числа компонент сингулярного разложения, норма составляющей $\mathbf{e}_{y2}$, связанной с шумом, возрастает. Ошибку $\mathbf{e}_{y3}$, в свою очередь, можно представить в виде суммы двух составляющих $\mathbf{e}_{y31}$ и $\mathbf{e}_{y32}$:

$$\mathbf{e}_{y3} = \mathbf{D}\,\mathbf{\Phi}^{+}\,\mathbf{y}_0 - \mathbf{D}\,\mathbf{\Phi}_k^{+}\,\mathbf{y}_0 - \mathbf{D}\,\mathbf{\Phi}_k^{+}\,\boldsymbol{\varepsilon}; \quad (20)$$

$$\mathbf{e}_{y31} = \mathbf{D}\,\mathbf{\Phi}^{+}\,\mathbf{y}_0 - \mathbf{D}\,\mathbf{\Phi}_k^{+}\,\mathbf{y}_0;\ \mathbf{e}_{y32} = \mathbf{D}\,\mathbf{\Phi}_k^{+}\,\boldsymbol{\varepsilon}; \tag{21}$$

Составляющая $\mathbf{e}_{y31}$ имеет детерминированный характер, а $\mathbf{e}_{y32}$ – стохастический.

При определенных уровнях шума и свойствах операторов $\mathbf{\Phi}_k$, $\mathbf{D}$ норма ошибки $d_y = \|\mathbf{e}_y\|$ имеет минимум зависимости от числа k компонент сингулярного разложения. Пример показан на рис.2. С нарастанием уровня шума положение минимума смещается в сторону меньших значений k.

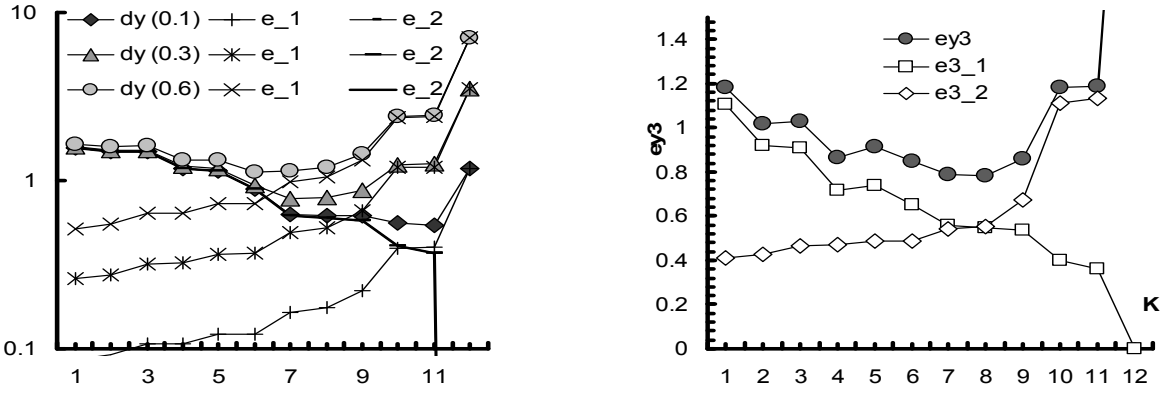


Рис. 2. а) Зависимость ($\mathbf{e}_{y1}$+$\mathbf{e}_{y31}$) и ($\mathbf{e}_{y2}$+$\mathbf{e}_{y32}$) от k; б) Зависимость $\mathbf{e}_{y31}$, $\mathbf{e}_{y32}$, $\mathbf{e}_{y3}$ от k
где: RSS – квадрат нормы невязки $\mathbf{y}$, σ^2 – дисперсия шума.

Поскольку ошибка восстановления сигнала d_y представима как сумма ошибки ($\mathbf{e}_{y1}$+$\mathbf{e}_{y2}$) нередуцированной оценки $\mathbf{y}$ и ошибки $\mathbf{e}_{y3,}$ вносимой редуцирующим преобразованием, мы предлагаем производить выбор оптимального числа компонент сингулярного разложения по критерию выбора модели. Для того чтобы число компонент сингулярного разложения, определяемое по критерию выбора модели, обеспечивало ошибку d_y, близкую к минимальной, необходимо, чтобы минимум нормы ошибки ($\mathbf{e}_{y1}$+$\mathbf{e}_{y2}$) и минимум ошибки восстановления сигнала d_y были близки. Для подтверждения этого факта ниже приведены результаты модельных экспериментов, позволяющие сопоставить поведение значений критерия Маллоуза и ошибки восстановления сигнала от k.

Выбор числа компонент сингулярного разложения по критериям выбора модели

Задача построения модели – по данным, представленным парами вход-выход, построить модель, связывающую вход и выход. Задача выбора модели – выбрать модель, близкую к оптимальной в смысле минимума ошибки. Методы выбора модели используют различные критерии выбора [5, 6, 7]. КВМ основаны на различных типах ошибки, например, ошибка прогнозирования [5], ошибка обобщения [6, 7] и др. На оптимальных моделях критерии достигают минимума. Пусть набор данных представлен L парами наблюдений $D_L=\{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1,L}$. входа $\mathbf{x}_i$ и выхода y_i. $\mathbf{X}\in\Re^{L\times N}$ – матрица входов. Значения y_i искажены аддитивным шумом ε_i. Ошибка прогнозирования – это мера ошибки между оцененными и реальными значениями в точках, соответствующих образцам обучающей выборки:

$$I_{PTE} = E_\varepsilon\|\mathbf{By}-\mathbf{y}_0\|^2 = \|\mathbf{By}_0-\mathbf{y}_0\|^2 + \mathbf{tr}(\mathbf{BQB}^{\mathrm{T}}), \tag{22}$$

где, $\mathbf{B}=\mathbf{X}_s(\mathbf{X}_s{}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_s)^{-1}\mathbf{X}_s{}^{\mathrm{T}}$ – оператор, отображающий $\mathbf{y}$ в оценку $\mathbf{y}_0$, полученную моделью, $\mathbf{Q}=\sigma^2\mathbf{I}_N$ – ковариационная матрица шума, $\mathbf{I}_N\in\Re^{N\times N}$ – единичная матрица. Первый член ошибки прогнозирования (смещение $\|\mathbf{By}_0-\mathbf{y}_0\|^2$) – есть точность восстановления незашумленного вектора значений обучающей выборки $\mathbf{y}_0$, и она убывает от сложности модели s_1. Второй член (дисперсия $\mathbf{tr}(\mathbf{BQB}^{\mathrm{T}})$) возрастает с возрастанием сложности.

Наиболее известными критериями выбора модели являются критерии: AIC Акаике [6], $L(\mathbf{y})$ и $gMDL$ Бин Ю [7], C_P Маллоуза [5].

Критерий Маллоуза C_P дает несмещенную оценку ошибки прогнозирования:

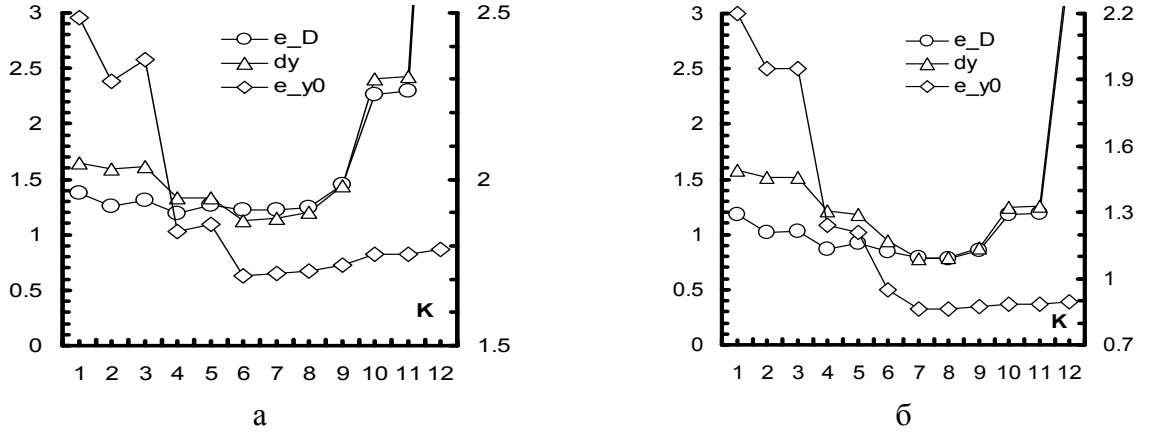
$$C_P = RSS + 2\sigma^2 s_1, \tag{23}$$

Экспериментальные исследования

Исследовались линейные системы A и B, матрицы $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ которых представлены радиальными базисными функциями: $f_n(z)=\exp(-g(z-c)^2)$, $c=dn+b$, (d=5, b=20), z={1,5,10,…,100}, n – номер базисной функции. Вектор $\boldsymbol{\theta}$ в экспериментах был следующим: θ_5=1, θ_6=0,5, θ_{10}=1, θ_{11}=0,26, θ_{12}=0,25, другие компоненты вектора $\boldsymbol{\theta}$ нулевые. Сигналы $\mathbf{y}_0$ и $\mathbf{y}_{01}$ получены как $\mathbf{\Phi\theta}$, $\mathbf{\Psi\theta}$ соответственно. Уровень шума {0,1, 0,3, 0,6}. Для A параметр g=0,05, для B g=0,1.

Экспериментально исследовались следующие зависимости:

- ошибки d_y восстановления сигнала $\mathbf{y}_{01}$ от k;
- детерминированной ($\mathbf{e}_{y1}$+$\mathbf{e}_{y31}$) и стохастической ($\mathbf{e}_{y2}$+$\mathbf{e}_{y32}$) составляющих ошибки d_y от k (рис. 2);
- нормы $\mathbf{e}_{y3}$ от числа компонент сингулярного разложения k;
- нормы составляющих ошибки $\mathbf{e}_{y3}$ от k (рис. 2-б);
- нормы ошибки ($\mathbf{e}_{y1}$ + $\mathbf{e}_{y2}$) нередуцированной оценки $\mathbf{y}$ от k (рис.3);
- ошибки d_y при различных матрицах $\mathbf{\Psi}$ (g={0,5, 0,2, 0,7});
- значения критерия Маллоуза от k



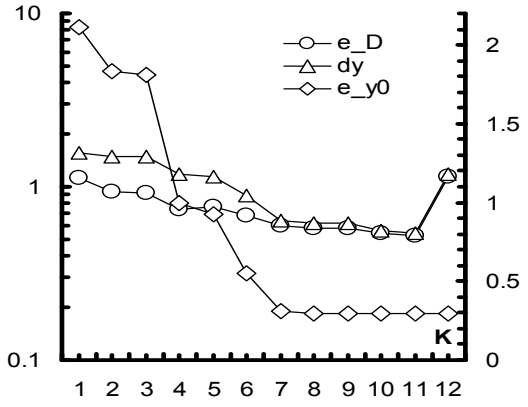
а б

Рис. 3. Зависимость d_y, ($\mathbf{e}_{y1}$ + $\mathbf{e}_{y2}$) и $\mathbf{e}_{y3}$ от k для уровней шума: а– 0,6, б– 0,3.

Зависимость ошибки d_y восстановления сигнала $\mathbf{y}_{01}$ от k при уровнях шума {0,1, 0,3, 0,6} приведена на рис.2. Приведена также зависимость составляющих ошибки d_y от k. Норма детерминированной составляющей ($\mathbf{e}_{y1}$+$\mathbf{e}_{y31}$) ошибки редукции убывает с ростом числа компонент сингулярного разложения. Норма стохастической составляющей ($\mathbf{e}_{y2}$+$\mathbf{e}_{y32}$) возрастает. Такое поведение составляющих ошибки от k определяет факт наличия минимума ошибки. Детерминированная составляющая ошибки не включает вектора шума и, соответственно, не меняется при изменении уровня шума. Зависимость стохастической составляющей от k масштабируется уровнем шума. Такая зависимость составляющих ошибки определяет факт смещения минимума ошибки в область меньших k при увеличении уровня шума. Значение ошибки в минимуме при этом также возрастает. Составляющие ошибки $\mathbf{e}_{y1}$, $\mathbf{e}_{y2}$ зависят только от свойств матрицы базиса $\mathbf{\Phi}$ и вектора выхода $\mathbf{y}$ исходной линейной системы A. Норма составляющей $\mathbf{e}_{y1}$ убывает с ростом k, а норма составляющей $\mathbf{e}_{y2}$ – растет. Фактически $\mathbf{e}_{y1}$ и $\mathbf{e}_{y2}$ – это смещения и дисперсия оценки выхода $\mathbf{y}$ без преобразования базиса. Компонента $\mathbf{e}_{y3}$ – составляющая ошибки, вносимая преобразованием выхода A к выходу B, в свою очередь, имеет минимум. Зависимость

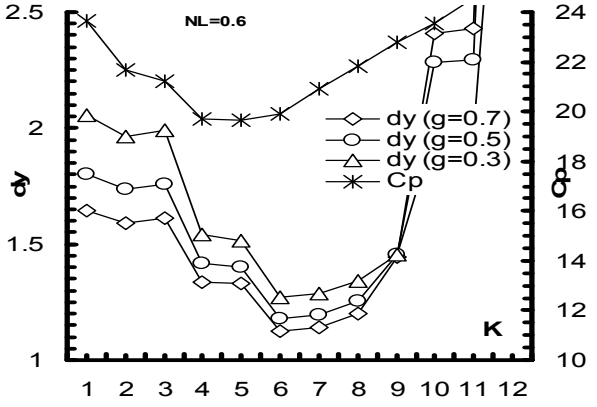
нормы составляющих ошибки $\mathbf{e}_{y3}$ от k приведена на рис. 2-б. Норма $\mathbf{D\Phi}^{+}\mathbf{y}_0$ – постоянна, т.к. сомножители не зависят от k; а $\mathbf{D\Phi}_k^{+}\mathbf{y}_0$ с возрастанием k – приближается к $\mathbf{D\Phi}^{+}\mathbf{y}_0$ и становится равным ему при k=N. Соответственно $\mathbf{e}_{y31}$ – убывает до нуля. Норма $\mathbf{e}_{y31}$ возрастает.

Зависимость нормы ошибки ($\mathbf{e}_{y1}$ + $\mathbf{e}_{y2}$) нередуцированной оценки $\mathbf{y}$ от k при уровнях шума {0,1, 0,3, 0,6} приведена на рис.3. Также приведена зависимость нормы составляющей $\mathbf{e}_{y3}$ – ошибки, вносимой редуцирующим преобразованием от k при тех же уровнях шума, и аналогичная зависимость для d_y. Каждая из зависимостей имеет минимум в исследуемом диапазоне k. Сопоставление зависимостей показывает, что положение минимумов в данном эксперименте совпадает. Этот факт создает предпосылки для отыскания близкого к оптимальному значения k путем минимизации критерия выбора модели.



в

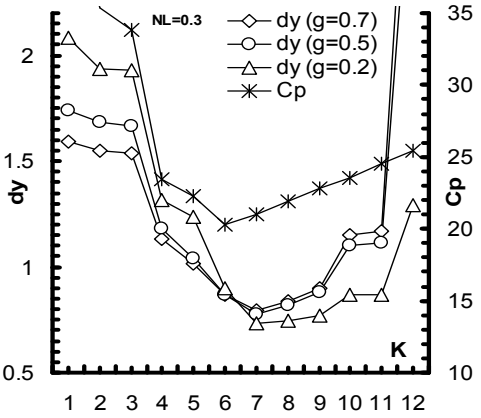
Рис. 3. Зависимость d_y, ($\mathbf{e}_{y1}$ + $\mathbf{e}_{y2}$) и $\mathbf{e}_{y3}$ от k для уровней шума в – 0,1



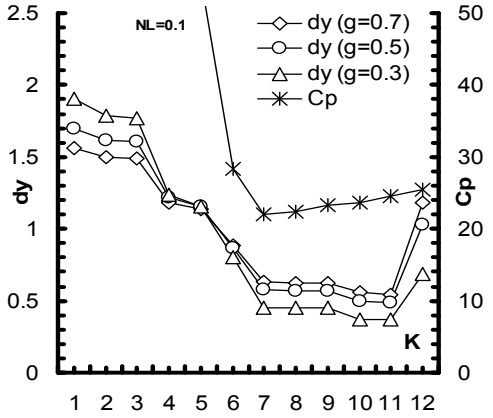
а

Рис. 4. Зависимость d_y и Cp от k для уровней шума: а – 0,6

Зависимость ошибки d_y при различных матрицах $\mathbf{\Psi}$ (g={0,5, 0,2, 0,7}) и значений критерия Маллоуза от k приведены на рис.4. Минимум критерия выбора модели достаточно близок минимуму ошибки d_y. За счет этого может быть обеспечена достаточно высокая точность редукции измерений.



б



в

Рис. 4. Зависимость d_y и Cp от k для уровней шума: б – 0,3, в – 0.

Выводы

Проведена разбивка ошибки решения задачи редукции на детерминированную ($\mathbf{e}_{y1}$+$\mathbf{e}_{y31}$) и стохастическую ($\mathbf{e}_{y2}$+$\mathbf{e}_{y32}$) составляющие. Исследование поведения составляющих ошибки от числа компонент сингулярного разложения k показало, что

детерминированная составляющая убывает с ростом k, а стохастическая – растет. В рассмотренной задаче соотношение норм детерминированной и стохастической составляющих ошибки таково, что ошибка восстановления сигнала имеет минимум. С возрастанием уровня шума положение минимума ошибки смещается в область меньших значений k и значение ошибки в точке минимума возрастает.

Ошибка восстановления сигнала представлена как сумма ошибки ($\mathbf{e}_{y1}+\mathbf{e}_{y2}$) нередуцированной оценки $\mathbf{y}$ и ошибки $\mathbf{e}_{y3}$, вносимой редуцирующим преобразованием. Экспериментально показано совпадение минимума нормы ошибки ($\mathbf{e}_{y1}+\mathbf{e}_{y2}$) нередуцированной оценки $\mathbf{y}$ и минимума ошибки восстановления сигнала d_y, что позволяет использовать критерий Маллоуза для оценки минимума ошибки восстановления сигнала.

Проведено экспериментальное исследование зависимости значений критерия Маллоуза от числа компонент сингулярного разложения. Показано, что близость минимума критерия выбора модели к минимуму ошибки d_y позволяет обеспечить достаточно высокую точность редукции измерений.

1. Пытьев Ю.П. Математические методы интерпретации эксперимента. – М.: Высшая школа, 1989. – 351 с.
2. Пытьев Ю.П. Псевдообратный оператор. Свойства и применения // Математический сборник. – 1982. – Т. 118(160), №1(5). – С. 19-49.
3. Касьянюк С.А. К задаче интерпретации данных, полученных наблюдениями с помощью дискретного множества датчиков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1981. – Т. 18, №3. – С. 553-560.
4. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y, Solution of ill-posed problems. V.H. Winston, Washington, DC, 1977.
5. Mallows C.L. Some comments on Cp // Technometrics. – 1973. – V. 15, № 4. – P. 661-675.
6. Akaike H. A new look at the statistical model identification // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1974. – V. 19, № 6. – P. 716-723.
7. Hansen M., Yu B. Model selection and minimum description length principle //J. Amer. Statist. Assoc. – 2001. – V. 96. – P. 746-774.

Е.Г. Ревунова, Ю.Л. Забулонов, Л.А. Одукалец

ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДОВИХ ПОМИЛКИ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ РЕДУКЦІЇ ВИМІРЮВАНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ СИНГУЛЯРНОГО РОЗКЛАДАННЯ

Проведено експериментальний аналіз точності рішення задачі редукції методом сингулярного розкладання. Досліджено залежність норми складових помилки рішення (зміщення і дисперсія) від числа компонент сингулярного розкладання. Визначення мінімуму помилки здійснювалося з використанням критерію Маллоуза. Метод редукції з використанням критерію Маллоуза забезпечує досить високу точність редукції.

E.G. Revunova, Yu.L. Zabulonov, L.A. Odukalets

INVESTIGATION OF THE ERROR COMPONENTS IN THE SOLUTION OF PROBLEM OF MEASUREMENTS REDUCTION USING SINGULAR VALUE DECOMPOSITION

Experimental analysis of solution accuracy for the problem of reduction by method of singular value decomposition was conducted. Dependence of the error component rate (bias and variance) in the solution on the number of components of singular value decomposition was analyzed. The minimum error was determined using Mellows criterion. Reduction method comprising the use of Mellows criterion ensures sufficiently high accuracy of reduction.