

Е.В. АЗАРЕНКО, Ю.Ю. ГОНЧАРЕНКО, М.М. ДИВИЗИНЮК

*Севастопольский национальный университет ядерной энергии и промышленности,
г. Севастополь*

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ВОДНОЙ СРЕДЫ

Предлагается обобщенная математическая модель движения водной среды с учетом региональных особенностей Черного моря, в соответствии с которыми вся Черноморская среда разделяется на приповерхностные и придонные слои, а также водную толщу, где отсутствует воздействие силы трения.

Введение

Прогнозирование движения водной среды представляет собой актуальную проблему, стоящую как перед фундаментальной, так и перед прикладной наукой [1]. В зависимости от прикладных аспектов это могут быть задачи тепло- и массообмена в водной среде, объясняющие морскую турбулентность и циркуляцию вод [2,3], вопросы прогнозирования распространения антропогенных загрязнений [4,5] и многие другие прикладные задачи [6,7]. Каждая из предлагаемых в этих источниках исследования моделей предназначена для решения вполне определенной задачи. Всех их объединяет универсальность, то есть применимость для любых акваторий Мирового океана, при этом не учитываются их региональные особенности, что является главным недостатком. Особенность региональных условий Черного моря, по мнению ряда ученых-океанологов, состоит в том, что оно является своеобразной естественной моделью Мирового океана, и большинство гидрологических закономерностей, характерных для океанов, проявляются и в Черноморской акватории.

Постановка цели и задач научного исследования

Целью работы является разработка обобщенной модели движения водной среды с учетом особенностей Черноморского водного бассейна. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи. Во-первых, рассмотреть основные уравнения гидродинамики, применяемые для описания движения вод океана. Во-вторых, сформулировать условия, определяющие региональные особенности Черноморского водного бассейна. В-третьих, разработать обобщенную модель движения с учетом региональных особенностей Черного моря.

Особенности движения водной среды

Для описания течения потока воды используются основные уравнения термодинамики турбулентного океана. Обычно на практике используют не вектор скорости течения, а его проекции на оси сферической системы координат, а именно: φ - широта или $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ - дополнение к широте, λ - долгота, R - удаление от центра Земли.

Проекция на радиус R также может заменяться проекцией на ось z , которая направлена практически вдоль радиуса от невозмущенной поверхности вглубь океана, тогда уравнения движения будут иметь вид (1) и (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - \frac{v_\lambda^2}{R} \operatorname{ctg} \theta - 2\omega \cos \theta v_\lambda = \\ = -\frac{1}{\rho_0 R} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} K_v \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{K_{VL}}{R^2} \nabla^2 v_\theta, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + v_z \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} + \frac{v_\theta v_\lambda}{R} \operatorname{ctg} \theta + 2\omega \cos \theta v_\theta = \\ = -\frac{1}{\rho_0 R \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial z} K_v \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} + \frac{K_{vL}}{R^2} \nabla^2 v_\lambda. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение гидростатики

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g. \quad (3)$$

Уравнение неразрывности в приближении Буссинеска:

$$\frac{1}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta v_\theta + \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Ввиду относительной малости адиабатических изменений температуры и малости градиентов основных океанологических характеристик уравнение переноса для движущейся среды примет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v_\lambda}{R \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} K_T \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{K_{TL}}{R^2} \nabla^2 T. \quad (5)$$

Аналогично, в связи с малыми изменениями плотности и градиента солёности уравнение диффузии солей запишется в виде:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{v_\lambda}{R \sin \theta} \frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial S}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} K_S \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{K_{SL}}{R^2} \nabla^2 S. \quad (6)$$

В уравнения (1)-(6) входит семь неизвестных величин: составляющие вектора скорости v_θ, v_λ, v_z , гидродинамическое давление P , плотность ρ , температура T и солёность S морской воды. Для замыкания системы уравнений необходимо ввести еще одно уравнение – уравнение состояния морской воды, которое в самой общей форме имеет вид

$$\rho(S, T, P) = \rho(35, 0, 0) + \delta \rho_S + \delta \rho_T + \delta \rho_P + \delta \rho_{ST} + \delta \rho_{SP} + \delta \rho_{TP} + \delta \rho_{STP}, \quad (7)$$

где $\delta \rho$ - поправки плотности на S, T, P .

В системе (1)-(7) обозначены: v_θ, v_λ, v_z - составляющие скорости течения по осям θ, λ, z сферической системы координат, $\nabla^2 = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right)$ - горизонтальная часть оператора Лапласа в сферических координатах.

Таким образом, полная система гидродинамической системы океана содержит семь уравнений и существенно усложняется неопределенностью коэффициентов турбулентности K_v, K_T, K_S и требует дополнительных уравнений, устанавливающих связь между этими коэффициентами и остальными неизвестными.

Условия, определяющие региональные особенности Черноморского бассейна

Первым допущением является условие однородности плотности морской среды по вертикали и горизонтали, при этом не учитываются процессы тепло- и влагообмена между

водной средой и атмосферой, водной средой и литосферой, а также изменение плотности воды с глубиной вследствие гидростатического давления.

Во-вторых, допустим, что для однородной Черноморской среды ветровая циркуляция устанавливается относительно быстро, то есть

$$\text{Sh} \cdot K_i = \frac{1}{t_x \cdot f_x} \ll 1, \quad (8)$$

где $\text{Sh} = \frac{L_x}{V_x \cdot t_x}$ - число Струхала;

$K_i = \frac{V_x}{f_x \cdot L_x}$ - число Кибеля;

V_x, L_x, t_x, f_x - характерные масштабы горизонтальной скорости, горизонтальной координаты, времени и параметра Кориолиса ($t_x \geq 10^6 \text{ с}$, $f_x \approx 10^{-4} \text{ с}$).

Третий постулат состоит в том, что в однородном океане за счет дрейфового переноса появляются горизонтальные градиенты давления (9), (10):

$$\frac{\partial P}{R \partial \theta} = g \rho_0 \frac{\partial \zeta}{R \partial \theta}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial P}{R \sin \theta \partial \lambda} = g \rho_0 \frac{\partial \zeta}{R \sin \theta \partial \lambda}, \quad (10)$$

Вблизи берегов, у поверхности и дна возрастает роль трения, и вклад соответствующих составляющих достигает значений слагаемых геострофического течения. Тогда динамика внутренней области однородного моря в квадистационарном приближении будет описываться системой уравнений (11), (12), (13):

$$f v_\lambda = g \frac{\partial \zeta}{R \partial \theta} + K_v \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}, \quad (11)$$

$$-f v_\theta = g \frac{\partial \zeta}{R \sin \theta \partial \lambda} + K_v \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial z^2}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{R \partial \theta} + \frac{\partial v_\lambda}{R \sin \theta \partial \lambda} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (13)$$

Влияние на эти динамические процессы атмосферы и дна задается граничными условиями:

при $z = 0$ - невозмущенная поверхность океана:

$$\rho_0 K_v \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -\tau_\theta, \quad \rho_0 K_v \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} = -\tau_\lambda, \quad v_z = 0, \quad (14)$$

при $z = H$

$$v_\theta = 0, \quad v_\lambda = 0, \quad v_z = 0. \quad (15)$$

Вводя комплексные скорость V , градиент давления ξ и напряжение трения ветра на поверхности τ , уравнения движения (11), (12) и первые два из граничных условий (14) и (15) можно записать в виде

$$ifV = g\xi + K_v \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad (16)$$

$$\text{при } z = 0: \quad \rho_0 K_v \frac{\partial V}{\partial z} = -\tau, \quad (17)$$

$$\text{при } z = H: \quad V = 0. \quad (18)$$

В результате решения (16) – (18) с учетом того, что в приближении однородного океана ξ не зависит от глубины для северного полушария ($f > 0$), получается

$$V = \frac{\tau}{\mu K_v} \frac{sh \mu(H-z)}{ch \mu H} + \frac{g\xi}{if} \left(1 - \frac{ch \mu z}{ch \mu H} \right), \quad (19)$$

$$\text{где } \mu = \left(\frac{f}{2K_v} \right)^{\frac{1}{2}} (1+i).$$

Первое слагаемое в правой части (19) – дрейфовый компонент движения – является результатом непосредственного влекущего действия ветра. Второе слагаемое определяется наличием в океане горизонтального градиента давления и носит название градиентного компонента движения. Суперпозиция (19) чисто дрейфового и градиентного течений в однородном море образует так называемую экмановскую модель элементарной системы течений.

Вертикальная составляющая суммарного дрейфово-градиентного течения определяется из проинтегрированного по вертикали уравнения неразрывности (13) с учетом последнего из граничных условий (14):

$$v_z = -\int_0^z \text{div}_r V = -\text{div}_r \left\{ \frac{\tau}{if} \frac{ch \mu H - ch \mu(H-z)}{ch \mu + 1} + \frac{g\xi}{if} \left(z - \frac{1}{\mu} \frac{sh \mu z}{ch \mu H} \right) \right\}, \quad (20)$$

где div_r обозначает дивергенцию на горизонтальной плоскости.

Поскольку в соответствии с (9), (10) в величину ξ входят первые производные от уровня ζ , то подстановка в выражение (20) граничного условия для вертикальной составляющей скорости у дна $v_z(i, \lambda, H) = 0$ приводит к уравнению второго порядка относительно $\zeta(i, \lambda)$, для решения которого необходимо располагать не зависящим от вертикальной координаты граничным условием. В связи с этим обычно используемое условие непротекания на твердых границах выражается через равенство нулю не нормальной составляющей скорости на каждом горизонте, а через нулевое значение нормальной составляющей полного потока, что является четвертым условием:

$$(M_n)_L = 0. \quad (21)$$

Значение полного потока M находится интегрированием уравнения (19) по невозмущенной поверхности до дна:

$$M = \int_0^H V dz = \frac{\tau}{if} \frac{\operatorname{ch} \mu H - 1}{\operatorname{ch} \mu H} + \frac{g\xi}{if} \left(H - \frac{1}{\mu} \operatorname{th} \mu H \right). \quad (22)$$

Отделяя здесь действительную и мнимую части и составляя в зависимости от направления береговой черты выражение (21), получаем искомое граничное условие для определения уровня моря ζ , после чего на основании формул (19) и (20) находим вектор скорости течения на любом горизонте.

Таким образом, особенности Черноморского бассейна определяются четырьмя условиями, а именно: однородностью плотности морской среды, быстрым установлением ветровой циркуляции, возрастанием роли трения в приповерхностных, придонных и прибрежных слоях водной среды, а также непротеканием воды на твердых границах.

Обобщенная модель движения

В (19) входит множитель h , который зависит от соотношения глубины моря и величины μ ,

$$h = \left(\frac{f}{2K_v} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

Этот множитель имеет размерность длины, а его физический смысл состоит в том, что он определяет толщину слоев, в пределах которых заметно сказывается эффект трения ветра и эффект трения о дно.

Из классической океанографии известно, что глубина трения Экмана D связана с h соотношением $D = \pi \cdot h$. Когда $h \ll H$, море принято называть глубоким. В этом случае учитывая, что

$$\frac{\operatorname{sh} \mu(H-z)}{\operatorname{ch} \mu H} \approx e^{-\mu z}; \quad \frac{\operatorname{sh} \mu z i}{\operatorname{ch} \mu H} \approx e^{-\mu(H-z)}, \quad (24)$$

формулу (19) можно записать как

$$V = \frac{\tau}{\mu K_v} e^{-\mu z} + \frac{g\xi}{if} - \frac{g\xi}{if} e^{-\mu(H-z)}. \quad (25)$$

Из анализа (25) следует, что в толще моря ($H - D > z > D$) на значительных расстояниях от свободной поверхности и дна основной вклад в течение вносит второе слагаемое. С достаточной степенью точности можно записать:

$$V = \frac{g\xi}{if}. \quad (26)$$

Эта формула описывает геострофическое течение. Его направление и скорость не меняются с глубиной. Направлено геострофическое течение перпендикулярно направлению градиента давления, причем в северном полушарии оно отклоняется вправо от наблюдателя, смотрящего в направлении максимального понижения уровня.

В верхнем слое моря ($0 < z < D$), кроме геострофического, существенную роль играет чисто дрейфовое течение. Профиль скорости в этом слое, носящем название экмановского поверхностного слоя трения или верхнего пограничного слоя, описывается формулой

$$V = \frac{\tau}{\mu K_v} e^{-\mu z} + \frac{g\xi}{if}. \quad (27)$$

У дна океана в слое толщиной D ($H > z > H - D$), где дрейфовый перенос практически отсутствует, и существенное влияние оказывает придонное трение, вертикальная структура течения будет определяться зависимостью

$$V = \frac{g\xi}{if} [1 - e^{-\mu(H-z)}]. \quad (28)$$

По аналогии с поверхностным этот слой называется экмановским придонным пограничным слоем. Здесь с увеличением расстояния от дна вектор скорости течения возрастает по модулю и одновременно совершает поворот до направления геострофического течения.

В другом предельном случае – случае мелководья ($H \ll h$) – имеет место соотношение $\mu H \ll 1$, учет которого приводит формулу (19) к виду

$$V = \frac{\tau}{K_v}(H - z) + \frac{g\xi}{2K_v}(H^2 - z^2). \quad (29)$$

В (29) полностью отсутствует эффект вращения. Эта формула также может быть получена, если при решении задачи (16) – (18) пренебречь ускорением Кориолиса.

На рис. 1 приведены годографы суммарного дрейфово-градиентного течения (для северного полушария) для различных значений $\frac{H}{D}$ при наличии нагонного ветра, параллельного отвесному бесконечно протяженному прямолинейному берегу.

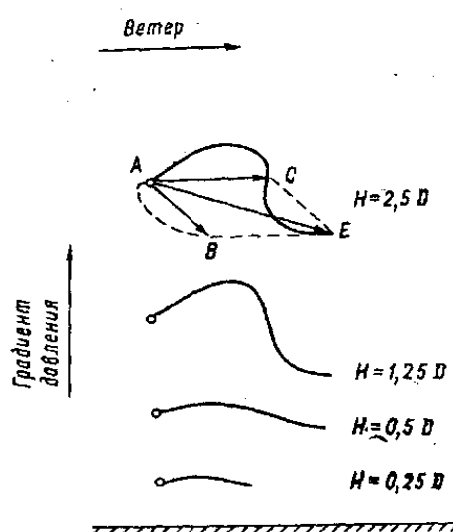


Рис. 1. Годографы скорости суммарного дрейфово-градиентного течения для различных значений H/D (северное полушарие):

AB – чисто дрейфовое течение на поверхности; AC – географическое течение;

AE – суммарное дрейфово-градиентное течение на поверхности.

Дрейфовое течение, формирующееся в поверхностном слое, создает интегральный перенос, направленный перпендикулярно к ветру, т.е. в данном случае нормально к береговой черте, вследствие чего у берега образуется нагон, а значит и градиент давления, направленный в сторону океана. Последний формирует градиентное течение, охватывающее всю толщу воды от поверхности до дна.

На том же рис. 1 помещена схема построения годографа для случая, когда $H = 2,5D$. В поверхностном пограничном слое имеется дрейфовое течение (годограф BA) и геострофическое течение AC. Их результирующая на каждом горизонте дает суммарное течение (годограф EC). Вне поверхностного и придонного пограничных слоев имеет место практически неизменное по глубине, направленное параллельно берегу геострофического течения (26). В придонном пограничном слое, как и в вышележащем промежуточном, дрейфовое течение практически отсутствует. Вследствие влияния дна градиентное течение имеет переменное направление и скорость (годограф CA).

По мере уменьшения глубины H , естественно, уменьшается толщина промежуточного слоя, и он исчезает при $H \leq 2D$. В связи с этим трансформируется и годограф суммарного дрейфово-градиентного течения. При $H = 0,25D$ он практически

становится отрезком прямой, параллельной береговой черте, что соответствует однонаправленному вдольбереговому переносу.

Что касается вертикальной составляющей скорости, то как следует из (20), существенное влияние на ее изменение с глубиной так же, как и на горизонтальные составляющие, оказывает наличие поверхностного и придонного пограничных слоев.

Таким образом, обобщенная модель движения Черноморской водной среды условно разделяет всю водную среду на три слоя, где учитывается трение ветра (приповерхностный слой), трение морского дна (придонный слой) и где отсутствует трение (основная водная толща). Вблизи берегов следует выделить отдельный прибрежный слой, где учитывается трение о берег и дно (береговой склон) одновременно.

Выводы

1. Полная система гидродинамической системы океана содержит семь уравнений и существенно усложняется неопределенностью коэффициентов турбулентности K_v, K_T, K_S и требует дополнительных уравнений, устанавливающих связь между этими коэффициентами и остальными неизвестными.

2. Особенности Черноморского бассейна определяются четырьмя постулатами, а именно: однородностью плотности морской среды, быстрым установлением ветровой циркуляции, возрастанием роли трения в приповерхностных, придонных и прибрежных слоях водной среды, а также непротеканием воды на твердых границах.

3. Обобщенная модель движения Черноморской водной среды условно разделяет всю водную среду на три слоя, где учитывается трение ветра (приповерхностный слой), трение морского дна (придонный слой) и где отсутствует трение (основная водная толща). Вблизи берегов следует выделить отдельный прибрежный слой, где учитывается трение о берег и дно (береговой склон) одновременно.

1 Гончаренко Ю.Ю. Модели распространения нефтяных загрязнений на водной поверхности / Ю.Ю. Гончаренко – Севастополь: Гос. океанариум, 2011. – 104 с.

2. Физика океана / Под ред. Ю.П. Доронина. – Л.: Гидрометеоиздат, 1978. – 296 с.

3. Динамика океана. / Под ред. Ю.П. Доронина. – Л.: Гидрометеоиздат, 1980. – 304 с.

4. Ісаєнко В.М. Моніторинг і методи вимірювання параметрів навколишнього середовища / В.М. Ісаєнко, Г.В. Лисиченко, Т.В. Дудар та інші – К.: Вид-во НАУ-друк, 2009. – 312 с.

5. Лисиченко Г.В. Методологія оцінювання екологічних ризиків / Г.В. Лисиченко., Г.А. Хміль, С.Б. Барбашев – Одеса: Астропринт, 2011. – 368 с.

6. Дивизинюк М.М. Акустические поля Черного моря / Дивизинюк М.М. – Севастополь: Гос. Океанариум, 1998. – 352 с.

Е.В. Азаренко, Ю.Ю. Гончаренко, М.М. Дивизинюк

УЗАГАЛЬНЕНА МОДЕЛЬ РУХУ ВОДНОГО СЕРЕДОВИЩА

Пропонується узагальнена математична модель руху водного середовища з урахуванням регіональних особливостей Чорного моря, у відповідності з якими все Чорноморське середовище розділяється на приповерхневі і придонні шари, а також водну товщу, де відсутній вплив сили тертя.

E. Azarenko, Y. Honcharenko, M. Diviznuk

GENERALIZED MODEL OF WATER MEDIUM MOTION

It is proposed generalized mathematical model of water medium motion, with respect to regional specialties the Black Sea. According to the model, all medium of the Black Sea is divided into near bottom layers, near surface layers, and water layer with no friction forces.