

Ю.Ю. ГОНЧАРЕНКО

*Севастопольский национальный университет ядерной энергии и промышленности,
г. Севастополь*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИФФУЗИИ АНТРОПОГЕННОЙ ПРИМЕСИ

Предлагается математическая модель диффузии антропогенной примеси в локальном объеме морской водной среды.

Введение

Проблема сохранения окружающей природной среды, обеспечения ее первозданного состояния при оптимальном использовании полезных ископаемых, воздушного и водного бассейнов является глобальной задачей человечества, которую подтвердили своими подписями руководители более двухсот государств в 1992 году в Рио-де-Жанейро [1]. В Украине имеются все правовые основы для решения этой глобальной задачи. Более того, экологическая безопасность рассматривается как одна из составляющих национальной безопасности [2]. По мнению ряда ведущих отечественных ученых-экологов [3-5], сохранение водных ресурсов обеспечивается реализацией двух научно-практических направлений. Первое – это мониторинг морской водной среды всеми возможными средствами: от стационарных морских систем до космических сканеров, обеспечивающих обнаружение различных видов антропогенных загрязнений. Второе – это модельный прогноз распространения антропогенных примесей как на водной поверхности, так и в водной толще. Безусловно, существует множество моделей переноса антропогенных примесей, но каждая из них учитывает специфические региональные условия, обусловленные физико-географическими особенностями рассматриваемой акватории.

Постановка цели и задач научного исследования

Целью данной работы является разработка математической модели диффузии антропогенной примеси в Черноморской водной среде. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие научные задачи. Во-первых, сформулировать условия существования модели в воде в виде определенных начальных условий. Во-вторых, на их основе разработать математическую модель переноса антропогенной примеси.

Начальные условия математической модели диффузии антропогенной примеси

Выделим внутри жидкости некоторый объем v , ограниченный поверхностью Π (рис. 1). Пусть через элементарную площадку $d\Pi$ протекает вода со скоростью V , тогда через площадь $d\Pi$ в направлении внешней нормали n в единицу времени протечет $cV_n d\Pi$, а через всю поверхность Π :

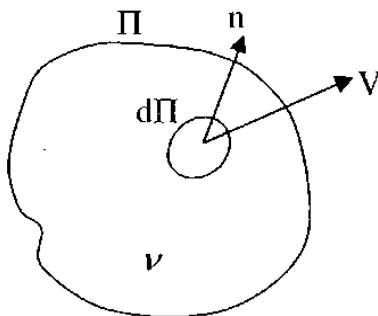


Рис. 1. Схема, поясняющая начальные условия

$$\int_{\Pi} \rho \mathbf{V}_n d\Pi = \int_{\Pi} \rho (\mathbf{V}_x \mathbf{n}_x + \mathbf{V}_y \mathbf{n}_y + \mathbf{V}_z \mathbf{n}_z) d\Pi. \quad (1)$$

Пусть в результате вытекания или притока воды в выделенном объеме происходит изменение плотности $\int_H \frac{dc}{dt} dH$. Если внутри объема не происходит образование или исчезновение какой-либо массы воды, то интеграл по поверхности компенсируется интегралом по объему и их общая сумма равна нулю:

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} dH + \int_{\Pi} \rho (\mathbf{V}_x \mathbf{n}_x + \mathbf{V}_y \mathbf{n}_y + \mathbf{V}_z \mathbf{n}_z) d\Pi = 0. \quad (2)$$

Перейдя по теореме Гаусса-Остроградского от интеграла по поверхности к интегралу по объему, получим

$$\int_H \frac{dc}{dt} dH + \int_V \rho \operatorname{div} \mathbf{V} dH = 0. \quad (3)$$

В силу произвольности выбора области интегрирования можно от интегральной формы перейти к дифференциальной:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (4)$$

Полученное выражение принято называть *уравнением неразрывности*.

Часто применяется иная форма записи этого уравнения, связанная с определением локального изменения плотности:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho. \quad (5)$$

Объединив в выражениях (4) и (5) члены, определяющие дивергенцию скорости и адвекцию плотности, получим другую форму записи уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (6)$$

Пусть основные гидрологические элементы: соленость, температура и гидростатическое давление в рассматриваемом объеме водной среды остаются постоянными, а изменение плотности происходит исключительно за счет попадания в этот объем антропогенной примеси, которое является одномоментным и однофазовым, то есть в выделенном объеме не существует источников этой антропогенной субстанции.

Математическая модель диффузии антропогенной примеси

Будем рассматривать не поток массы воды через элементарную площадку $d\Pi$, а поток антропогенной примеси Φ_A , тогда уравнение (6), описывающее локальное изменение плотности за счет потока антропогенной примеси, примет вид:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \operatorname{div} \Phi_A = 0. \quad (7)$$

Поток антропогенной примеси обуславливается двумя основными механизмами. Это упорядоченный перенос движущейся водой – адвекцией, и хаотическим молекулярным перемешиванием – диффузией. Первая, как известно, пропорциональна скорости течения V и начальной концентрации антропогенной примеси A , вторая пропорциональна молекулярному коэффициенту диффузии χ_A и градиенту антропогенной примеси ∇A , то есть

$$\Phi_A = \rho(V \cdot A - \chi_A \cdot \nabla A). \quad (8)$$

Знак минус перед диффузионной частью потока указывает на то, что он направлен в сторону, противоположную градиенту антропогенной примеси.

Выражение (7) можно видоизменить, выделив из него члены, связанные с изменением плотности воды, а именно:

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} = -A \operatorname{div}(\rho V) - \rho V \cdot \nabla A + \operatorname{div}(\rho \chi_A \cdot \nabla A). \quad (9)$$

Первые члены левой и правой части выражения (9) в сумме равны нулю на основании выражения (6), а сумма вторых членов составляет индивидуальную производную антропогенной примеси. В результате получаем аналитическую зависимость, которая определяет математическую модель диффузии антропогенной примеси, то есть

$$\rho \frac{\partial A}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho \chi_A \nabla A). \quad (10)$$

Вывод

Математическая модель диффузии антропогенной примеси представляет собой аналитическую зависимость изменения плотности локального объема морской воды за счет потока антропогенной примеси, которая определяется дивергенцией начальной плотности водной среды, молекулярным коэффициентом диффузии и градиентом антропогенной примеси.

1. Программа действий. Повестка дня на 21 век и другие документы конференции в Рио-де-Жанейро в популярном изложении. – Женева: Центр «За наше общее будущее», 1993. – 82 с.

2. Закон України «Про основи національної безпеки України» от 19.06.03. №964-IV.

3. Ветрова Н.М. Экологическая безопасность рекреационного региона / Н.М. Ветрова. – Симферополь: НАПКС, 2006. – 297 с.

4. Ісаєнко В.М. Моніторинг і методи вимірювання параметрів навколишнього середовища / В.М. Ісаєнко, Г.В. Лисиченко, Т.В. Дудар та інші – К.: Вид-во НАУ-друк, 2009. – 312 с.

5. Лисиченко Г.В. Методологія оцінювання екологічних ризиків / Г.В. Лисиченко, Г.А. Хміль, С.Б. Барбашев. – Одеса: Астропринт, 2011. – 368 с.

Ю.Ю. Гончаренко

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИФУЗІЇ АНТРОПОГЕННИХ ДОМІШОК

Пропонується математична модель дифузії антропогенної домішки в локальному обсязі морської водного середовища.

Y. Honcharenko

MATHEMATICAL MODEL OF ANTHROPOGENIC ADMIXTURE DIFFUSION

It is proposed the mathematical model of anthropogenic admixture diffusion in the local volume of sea water medium.